ÜBER DIE DICHTESTE ZUSAMMENSTELLUNG VON KONGRUENTEN KREISEN IN EINER EBENE

VON

AXEL THUE

(Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturv. Klasse 1910. No. 1)

UDGIVET FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

CHRISTIANIA
IN KOMMISSION BEI JACOB DYBWAD
1910

Fremlagt i den math.-naturv. Klasses Møde 19. November 1909.

A. W. BRØGGERS BOGTRYKKERI.

Wir wollen zuerst mit einigen Definitionen anfangen.

Haben n kongruente ausserhalb einander liegende Kreise in einer Ebene eine solche gegenseitige Stellung, dass man sie beziehungsweise mit $C_1 C_2 \cdots C_n$ bezeichnen kann, dass C_p und C_{p+1} für jede ganze Zahl p zwischen o und n einander berühren werden, dann sagen wir, dass die Kreise eine Kette bilden.

Wenn die Kreise C_1 und C_n auch einander berühren, sagen wir, dass die Kette geschlossen ist.

C_p und C_{p+1} und C_n und C_1 nennen wir nach einander folgende Kreise der geschlossenen Kette.

Das Polygon, in welchem die Endpunkte jeder Seite durch die Zentra zweier nach einander folgenden Kreise einer geschlossenen Kette gebildet sind, nennen wir das zu der Kette gehörige Polygon.

Die Bogen der Kreise einer geschlossenen Kette, welche in dem zu der Kette gehörigen Polygon liegen, nennen wir die inneren Bogen und die übrigen die äusseren Bogen der genannten Kreise.

Bilden einige von den Kreisen einer geschlossenen Kreiskette K auch eine geschlossene Kette H, wo die äusseren Bogen zweier Kreise einander nicht berühren, dann sagen wir, dass H die zu K gehörige einfache geschlossene Kette ist.

Zwei nach einander folgende Kreise der Kette H werden so definiert, dass sie immer die Endkreise eines kettenförmigen Teiles der geschlossenen Kette K bilden. Wir sagen, dass der genannte Teil von K zu den genannten zwei Kreisen von H gehört.

Ein dichtes System von kongruenten, ausserhalb einander liegenden Kreisen in einer Ebene und eine zu dem Systeme gehörige Randkette wollen wir folgendermassen definieren.

Drei einander sich berührende kongruente Kreise in einer Ebene bilden ein dichtes System von drei Kreisen, und die von den Kreisen gebildete Kette ist die einzige Randkette des Systems.

Kann ein System S von kongruenten Kreisen in einer Ebene als von zwei dichten Systemen $S_{,}$ und $S_{,,}$ gebildet aufgefasst werden, indem eine Randkette $R_{,}$ von $S_{,}$ und eine Randkette $R_{,,}$ von $S_{,,}$ einen kettenförmigen Teil T von zwei oder mehreren nach einander folgenden Kreisen gemeinsam haben, dann sagen wir, dass das System S auch ein dichtes ist.

Die geschlossene Kette R, die von den Kreisen von $R_{,}$ und $R_{,,}$ unter Weglassung der Kreise von T mit Ausnahme der Endkreise dieser Kette, gebildet ist, soll eine zu S gehörige Randkette sein.

Unter zwei nach einander folgenden Kreisen von R verstehen wir zwei Kreise von R, die auch nach einander folgende Kreise in $R_{,}$ oder $R_{,,}$ bilden.

Jede Randkette eines dichten Systems umschliesst die übrigen Kreise des Systems.

Satz.

Bezeichnet p die Anzahl der Kreise einer Randkette eines dichten Systems und q die Anzahl der übrigen Kreise des Systems, während U das Areal zwischen den Kreisen innerhalb der Randkette und τ das Areal zwischen drei einander berührenden unserer Kreise bedeutet, dann wird:

$$U = [2q + p - 2]\,\tau \qquad \ldots\ldots\ (1)$$

Der Satz gilt ja, wenn

$$p = 3 \text{ und } q = 0$$

Bedeuten ferner U $U_{,}$ $U_{,,}$ die von Kreisen unbedeckten Areale von S $S_{,}$ $S_{,,}$ innerhalb ihrer respektiven Randketten R $R_{,}$ $R_{,,}$, wo die Buchstaben die früheren Bedeutungen haben, und bedeuten p $p_{,}$ $p_{,,}$ beziehungsweise die Anzahl der Kreise von R R_1 R_2 und q q_1 q_2 die Anzahl der übrigen Kreise von beziehungsweise S $S_{,}$ $S_{,,}$ und endlich m die Anzahl von Kreisen der oben genannten Kette T, dann erhält man, wenn der Satz für $S_{,}$ und $S_{,,}$ richtig ist:

$$U_{,} = (2q_{,} + p_{,} - 2)\,\tau$$
$$U_{,,} = (2q_{,,} + p_{,,} - 2)\,\tau$$

Ferner bekommt man:

$$q = q_{,} + q_{,,} + (m - 2)$$
$$p = (p_{,} - m) + (p_{,,} - m) + 2$$
$$U = U_{,} + U_{,,} \qquad \text{oder}$$
$$2q + p - 2 = 2q_{,} + 2q_{,,} + 2(m - 2) + p_{,} + p_{,,} - 2m + 2 - 2 =$$
$$= 2q_{,} + 2q_{,,} + p_{,} + p_{,,} - 4 \qquad \text{oder}$$
$$U = U_{,} + U_{,,} = (2q + p - 2)\,\tau$$

Gilt also der Satz für $S_{,}$ und $S_{,,}$, so muss er folglich auch für S richtig sein. Hierdurch ist der Satz bewiesen.

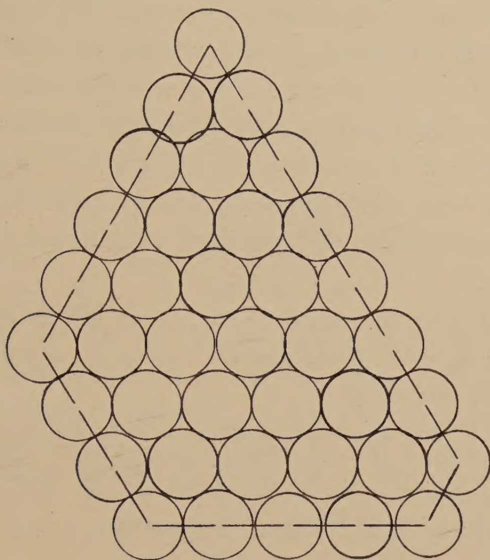


Fig. 1.

Theorem 1.

Umschliesst in einer Ebene eine geschlossene Kette K von p Kreisen ein System von q anderen Kreisen, indem sämtliche p + q Kreise ausserhalb einander liegen und kongruent sind, und bezeichnet U das Areal des von den q Kreisen nicht bedeckten Raumes innerhalb der Kette, während τ das Areal zwischen drei einander berührenden von unseren Kreisen bedeutet, so wird:

$$U = (2q + p - 2)\,\tau \qquad \ldots\ldots (2)$$

dann und nur dann, wenn die p + q Kreise ein dichtes System mit K als eine zugehörige Randkette bilden.

Sonst wird immer:

$$U > (2q + p - 2)\,\tau \qquad \ldots\ldots (3)$$

Beweis.

Bilden die $p + q$ Kreise ein dichtes System und die p Kreise also eine dazu gehörige Randkette, dann gilt, wie oben gezeigt ist, die Gleichung (2).

Erfüllen die $p + q$ Kreise nicht diese zwei Bedingungen, wollen wir die Unmöglichkeit der Relationen:

$$U \leqq (2q + p - 2)\,\tau \qquad \ldots\ldots (4)$$

beweisen.

Man sieht gleich ein, dass diese Behauptung richtig ist, wenn

$$p + q = 3 \quad \supset: \quad p = 3,\ q = 0$$

und wenn: $$p + q = 4 \quad \supset: \quad p = 4,\ q = 0$$

Wir brauchen also nur zu zeigen, dass die Behauptung richtig wird für $p + q = n$, wenn sie richtig ist für alle kleineren Werte von $p + q$.

Besteht die Relation (4), wenn $p + q = n$, so wollen wir zuerst beweisen, dass zwei nicht nach einander folgende der p Kreise der geschlossenen Kette K in Verbindung mit einigen der q inneren Kreise oder ganz allein, nicht eine Kreiskette D von nach einander folgenden Kreisen bilden können, wenn die genannten zwei Kreise die Endkreise der Kette bilden sollen.

Fände sich nämlich eine solche Kette D, so bildete sie mit der geschlossenen Kette K zwei geschlossene Ketten $K_,$ und $K_{,,}$, von denen D ein gemeinsamer Teil wäre.

Enthielten $D, K_,$ und $K_{,,}$ beziehungsweise $\alpha, p_,$ und $p_{,,}$ Kreise, während $q_,$ Kreise innerhalb $K_,$ und $q_{,,}$ innerhalb $K_{,,}$ lägen, so bekämen wir:

$$U_, \gtreqless (2q_, + p_, - 2)\tau$$
$$U_{,,} \gtreqless (2q_{,,} + p_{,,} - 2)\tau$$

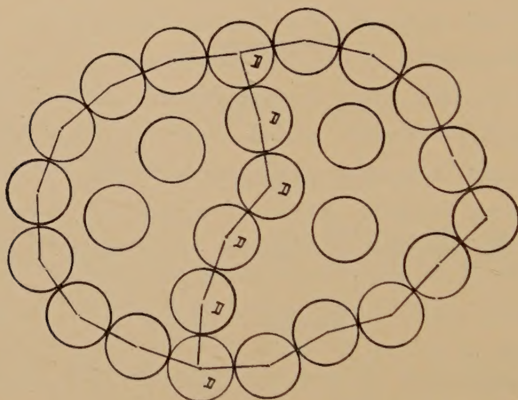


Fig. 2.

wo $U_,$ das Areal zwischen den $p_,$ und $q_,$ Kreisen und $U_{,,}$ das Areal zwischen den $p_{,,}$ und $q_{,,}$ Kreisen bedeutet.

Hier wird nämlich

$$p_, + q_, < p + q = n$$
$$p_{,,} + q_{,,} < p + q = n$$

Ferner werden hier nicht gleichzeitig

$$U_, = (2q_, + p_, - 2)\tau$$
$$U_{,,} = (2q_{,,} + p_{,,} - 2)\tau$$

Dann bildeten nämlich die $p_, + q_,$ Kreise ein dichtes System mit $K_,$ als Randkette, und die $p_{,,} + q_{,,}$ Kreise ein dichtes System mit $K_{,,}$ als

Randkette. Folglich bildeten auch die $p + q$ Kreise ein dichtes System mit K als Randkette, was gegen unsere Voraussetzung streitet.

Wir erhalten also hier

$$U_{,} + U_{,,} = U = (2q_{,} + 2q_{,,} + p_{,} + p_{,,} - 4)\,\tau$$

Nun wird aber

$$q = q_{,} + q_{,,} + \alpha - 2$$
$$p = (p_{,} - \alpha) + (p_{,,} - \alpha) + 2$$

oder

$$U > (2q + p - 2)\,\tau$$

Besteht hier die Relation (4), so enthält also das System von den p und q Kreisen nicht eine Kette D mit den oben erwähnten Eigenschaften.

Von allen möglichen Systemen S von unseren $n = p + q$ ausserhalb einander liegenden kongruenten Kreisen, wo die p Kreise eine geschlossene Kette K bilden, die die übrigen q Kreise umschliesst, giebt es nun ein System S_0, dessen zugehöriger Wert U_0 von U so klein wie möglich ist.

Fig. 3.

Indem nun S_k ein beliebiges von den nicht dichten Systemen S bedeutet und U_k den zugehörigen Wert von U, wollen wir also beweisen, dass U_k keinen der zwei Relationen (4) Genüge leistet.

Es bedeuten nun $S_{,}$ und $U_{,}$ beziehungsweise S_k und U_k, wenn $U_k = U_0$, aber S_0 und U_0, wenn $U_k > U_0$.

Genügt also U_k nicht der Relation (3), kann $S_{,}$ kein dichtes System sein.

Wir brauchen jetzt nur zu zeigen, dass $U_{,}$ keinen der zwei Relationen (4) genügen kann.

Wäre nämlich dies der Fall, so enthielte, wie früher bewiesen ist, das System $S_,$ keine Kette D mit den oben genannten Eigenschaften.

Unter Festhaltung der Kette K von $S_,$ können wir folglich hier die inneren q Kreise successiv derart verschieben, dass sie in der neuen Stellung, wie früher, innerhalb der Kette K und ausserhalb einander liegen, während keiner von ihnen die Kette K berühret.

Könnte man nämlich eine solche Verschiebung nicht vornehmen, so bildeten einige der q Kreise eine in Bezug auf Berührung zusammenhängende Fläche, die sich gegen mindestens drei Kreise von K stützte. Aber dann gäbe es mindestens eine Kette D von der erwähnten Art.

Das durch diese Verschiebung erhaltene neue System S wollen wir mit $S_{,,}$ und seinen zugehörigen Wert von U mit $U_{,,}$ bezeichnen.

Hier wird $U_{,,} = U_,$.

Wir wollen nun schliesslich zeigen, wie man hier durch eine kontinuirliche Veränderung von $S_{,,}$ immer imstande ist ein neues von unseren Systemen S zu finden, wo der zugehörige Wert von U kleiner als $U_{,,}$ wird.

Dies wird folgendermassen erreicht:

Es bedeutet H die zu K gehörige *einfache* Kreiskette in dem Systeme $S_{,,}$ und ferner P und Q beziehungsweise das zu K und H gehörige Polygon.

Wie erwähnt, bilden je zwei nach einander folgende Kreise x und y von H die Endkreise einer Kette E von h nach einander folgenden Kreisen von K. E bildet folglich, wenn $h > 2$, eine geschlossene Kette F mit einem zugehörigen Polygone M, die ausserhalb P und innerhalb Q liegt.

Es seien nun a, b, c und d vier nach einander folgende Ecken von Q, und α, β, γ und δ die entsprechenden Kreise von H, indem entweder mindestens einer der Polygonwinkel bei b und c kleiner als $2R$ ist, oder beide verschieden sind.

β und γ bilden die Endkreise eines kettenförmigen Teils W von K, der auch eine geschlossene Kette N bildet, wenn W mehr als zwei Kreise enthält.

Wir merken uns nun zuerst folgendes:

Bezeichnen $a_0\ b_0\ c_0\ d_0$ die vier Ecken eines Vierecks, wo

$$a_0b_0 = b_0c_0 = c_0d_0 = r$$

und setzt man

$$\angle\, d_0a_0b_0 = \varphi$$

$$\angle\, b_0c_0d_0 = \psi$$

$$a_0d_0 = s$$

so erhält man:

$$dT = \frac{rs}{2}\,\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin\psi}\,d\varphi \qquad \ldots\ldots (5)$$

wo dT den einem unendlich kleinen Zuwachs $d\varphi$ von φ entsprechender Zuwachs von dem Areal T des Vierecks bedeutet.

Unter Festhaltung der Kreise des Systemes $S_{,,}$ ausgenommen die Kreise der Kette W können wir, indem die Längen von ab und dc unverändert bleiben, diese Kette W als eine unveränderliche Figur ein bischen in der Ebene bewegen, sowohl durch eine Vergrösserung als durch eine Verkleinerung der Polygonenwinkel bei a oder d, so dass die p und q Kreise nach der genannten Verschiebung wieder ein System $S_{,,,}$ von den Systemen S bilden.

Durch eine Vergrösserung oder durch eine Verkleinerung der genannten Polygonenwinkel bei a oder d kann man indessen infolge der Gleichung (5) das Areal von Q und also hierdurch auch das Areal von P verkleinern.

Das Areal $U_{,,,}$ zwischen den p und q Kreisen in einem der auf diese Weise gefundenen Systemen $S_{,,,}$ wird folglich kleiner als $U_{,,}$ und $U_{,}$, was nach der Voraussetzung von $U_{,}$ unmöglich ist.

Ist also $p + q = n$, so bekommt man

$$U_k > [2q + p - 2]\, \tau$$

Hierdurch ist Theorem 1 bewiesen.

Aus diesem Theoreme ergiebt sich gleich:

Theorem 2.

Festhält man die Kreise der Randkette eines dichten Systemes, so kann man innerhalb der Kette die inneren Kreise nicht in einer neuen Lage placieren, wenn sämtliche Kreise ausserhalb einander liegen sollen.

Liegen innerhalb der Randkette eines dichten Systemes q Kreise, so kann man folglich innerhalb der Kette nicht mehr als q ausserhalb einander liegende von solchen Kreisen anbringen.[1]

[1] Bei dem skandinavischen Naturforscherkongres 1892 habe ich auf eine ganz andere Weise folgenden mehr allgemeinen Satz bewiesen:

Placiert man auf beliebige Weise auf der zu der Randkette eines dichten Kreissystems gehörige Polygonfläche ebenso viele Punkte, als das System Kreise enthält, so wird der Abstand zwischen mindestens zwei von den Punkten nicht grösser als der Kreisdiameter.

Lian, d. 15. November 1909.

Gedruckt am 2. November 1910.